Taller de Matemática Computacional - TUDAI
Examen Recuperatorio - 2017

Nombre y apellido:
DNI:
Nro de hojas:

1. Determine si la siguiente proposición lógica es tautología, contradicción o contingencia:

$$((\neg p \to q) \wedge (q \to r)) \wedge \neg r \to p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \to q$	$q \to r$	$(\neg p \to q) \wedge (q \to r)$	$\neg r$	$(\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \neg r$	$((\neg p \to q) \wedge (q \to r) \wedge \neg r) \to p$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0	1

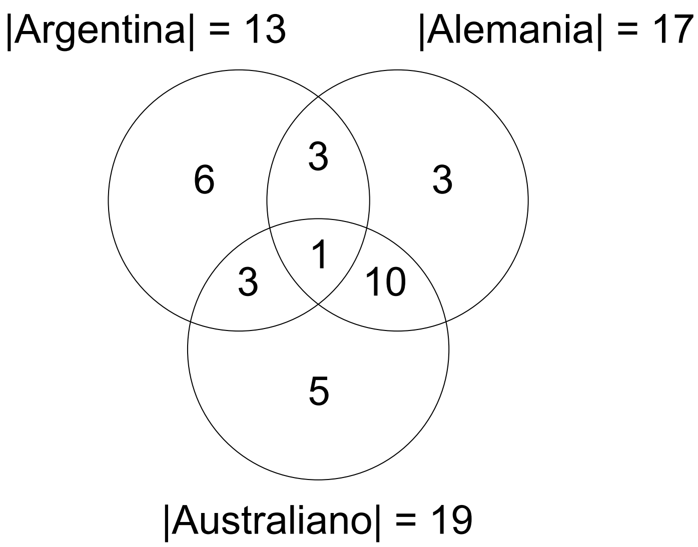
La proposición lógica es una tautología, dado que es verdadera para toda valuación.

2. Iván es un espía ruso que cuenta con 3 pasaportes fraguados: uno argentino, uno alemán y uno australiano. El pasaporte argentino le permite viajar sin problemas a 13 países, mientras que el alemán a 17 y el australiano a 19. A sólo un país puede viajar con cualquiera de los tres pasaportes. Por otro lado, el pasaporte alemán y el pasaporte argentino comparten 3 posibles países de fácil acceso, a los que no se puede viajar con el australiano; el alemán y el australiano comparten 10 a los que no se puede viajar con el argentino; y el argentino y el australiano comparten exclusivamente 3 países, a los que no se puede viajar con el pasaporte alemán.

   a) Plantear el problema utilizando un Diagrama de Venn.

   b) Determinar cuál es el total de países que puede visitar Iván sin problemas utilizando estos 3 pasaportes. Justificar.

a) El diagrama de Venn que representa el problema es el siguiente:



b) En total, Iván puede visitar 31 países usando los 3 pasaportes.

3. Determinar dominio, imagen, raíces, intervalos de positividad, negatividad, crecimiento y decrecimiento de la siguiente función. Indicar además si la función es inyectiva, suryectiva o biyectiva.

$$f(x) = -2(x+3)^2 - 1$$

Si desarrollamos la ecuación, obtenemos:

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Imagen: $\{y \in \mathbb{R} : y \leq -1\}$
- Raíces: no tiene.
- Intervalos de positividad: no tiene, es siempre negativa.
- Intervalos de negatividad: $\mathbb{R}$.
- Intervalos de crecimiento: $\{x \in \mathbb{R} : x < -3\}$
- Intervalos de decrecimiento: $\{x \in \mathbb{R} : x > -3\}$
- La función no es inyectiva porque $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 = -4$ y $x_2 = -2$, que son distintos entre sí.
- La función no es suryectiva porque su codominio es $\mathbb{R}$ pero su imagen es $\{y \in \mathbb{R} : y \leq -1\}$.
- La función no es biyectiva porque no se es ni inyectiva ni suryectiva.

4. Un maletín tiene dos cerraduras con claves de 3 dígitos. Determinar cuántas claves habría que probar en el peor de los casos hasta encontrar las correctas, si:

   a) Ambas cerraduras tienen la misma clave.

   b) Las claves pueden ser distintas.

   c) Las claves son distintas.

a) Si ambas cerraduras tienen la misma clave, entonces basta con resolver uno de los casos. Luego, tenemos 10^3 combinaciones posibles.

b) Si las claves pueden ser distintas, ahora tenemos $10^3 + 10^3 = 2 \times 10^3$ combinaciones posibles.

c) Primero necesito desbloquear una de las cerraduras haciendo 10^3 combinaciones diferentes. Luego, como ya conozco una clave que no va a ser, tengo que probar en la otra $10^3 - 1$ combinaciones más. Esto hace un total de $10^3 + 10^3 - 1$.

5. Para realizar una conexión de red de 5 km se tienen los siguientes repetidores:

Repetidor	Distancia	Probabilidad de error	Cantidad
A	2 km	0.30	1
B	3 km	0.20	1
C	3 km	0.15	1
D	2 km	0.25	1

   a) Elegir la combinación más conveniente (es decir, la que llegue exactamente al destino ubicado a 5 km con la menor probabilidad de error posible).

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el mensaje llegue?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el mensaje llegue si el primer repetidor envió correctamente?

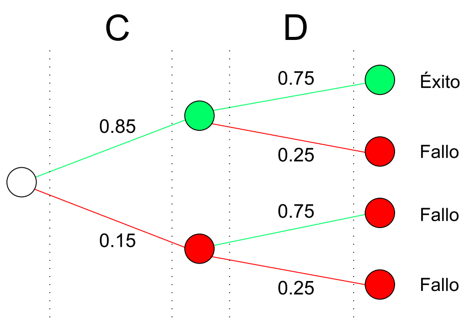
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el mensaje llegue si el primer repetidor falló?

a) Las combinaciones posibles son A-B, A-C, B-D y C-D, dado que son las únicas que permiten llegar exactamente a destino sin que sobre nada. Las probabilidades de error de cada alternativa están dadas por:

- $P(A - B) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$
- $P(A - C) = 0{,}3 \times 0{,}15 = 0{,}045$
- $P(B - D) = 0{,}2 \times 0{,}25 = 0{,}05$
- $P(C - D) = 0{,}15 \times 0{,}25 = \mathbf{0.0375}$

Luego, la combinación más conveniente es C-D, porque tiene la menor probabilidad de error.

Podemos usar este árbol para representar el envío de los mensajes:



b) La probabilidad de que el mensaje llegue es $0{,}85 * 0{,}75 = 0{,}6375$.

c) Si el primer repetidor envió correctamente, la probabilidad de que llegue correctamente es 0.75.

d) Si el primer repetidor falló, no hay forma de que el mensaje llegue exitosamente a destino porque ya se perdió, con lo que la probabilidad es 0.

6. Dados los vectores $u = (3, x)$ y $v = x(2, y)$:

   a) Si es posible, hallar x e y de modo tal que los vectores u y v sean iguales. Justifique su respuesta.

   b) Si $x = -1$ e $y = 4$, calcular $2u - 3v$ y hallar el ángulo entre u y $2v$.

a) Primero resolvemos $v = x(2, y) = (2x, yx)$. Ahora necesitamos que $3 = 2x$ y $x = yx$ para que la igualdad valga. Luego, $x = \frac{3}{2}$ e $y = 1$.

b) Resolvemos primero los vectores:

$$u = (3, -1)$$

$$v = x(2, y) = (2x, yx) = (-2, -4)$$

Y, ya que estamos, calcularemos $2v$:

$$2v = 2(-2, -4) = (-4, -8)$$

Ahora hallamos $2u - 3v$:

$$2u - 3v = 2(3, -1) - 3(-2, -4) = (6, -2) + (6, 12) = (12, 10).$$

Finalmente, calcularemos el ángulo entre u y $2v$:

$$\frac{< u, 2v >}{||u||||2v||} = \cos\theta$$

donde:

$$||u|| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

$$||2v|| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}.$$

y:

$$< u, 2v >= 3 * -4 + -1 * -8 = -12 + 8 = -4.$$

Finalmente:

$$\frac{< u, 2v >}{||u||||2v||} = \cos\theta$$

$$\arccos\frac{-4}{\sqrt{10}\sqrt{80}} = \theta$$

7. Las siguientes cantidades corresponden a los gastos diarios en pesos de un estudiante universitario: 100 - 150 - 120 - 200 - 250 - 180 - 120 - 300 - 220 - 190 - 180 - 150 - 130 - 200 - 240.

   a) ¿Cuál es el gasto promedio del estudiante en los días censados?
   b) ¿Cuál es la mediana?
   c) ¿Cuál es el cuartil 1 (25 %)?
   d) Indicar qué representa cada uno de los indicadores anteriormente calculado.

   a) El gasto promedio es de 182 pesos.

   b) La mediana del gasto es 180 pesos.

   c) El cuartil 1 (el que reúne al 25 % de los datos) es 140. Recordar que el procedimiento para calcularlo es similar al de la mediana. Es decir, primero ordenamos los datos de menor a mayor, y luego tomamos el valor ubicado al 25 % de la muestra. En este caso, como tenemos una cantidad impar de valores, debemos tomar el promedio entre 130 y 150, que es 140.

   d) La media y la mediana son medidas de tendencia central, y describen el comportamiento central de la muestra. El cuartil 1 representa el comportamiento del 25 % inferior de los datos utilizados.

8. Calcular $35C_{(16)} + 1011010111_{(2)}$.

   Para poder realizar la suma, paso los dos números a base decimal, primero:

   $35C_{(16)} = 12_{(10)} * 16^0_{(10)} + 5_{(10)} * 16^1_{(10)} + 3_{(10)} * 16^2_{(10)} = = 12_{(10)} * 1_{(10)} + 5_{(10)} * 16_{(10)} + 3_{(10)} * 256_{(10)} = 860_{(10)}$

   $1011010111_{(2)} = 1_{(10)} * 2^0_{(10)} + 1_{(10)} * 2^1_{(10)} + 1_{(10)} * 2^2_{(10)} + 0_{(10)} * 2^3_{(10)} + 1_{(10)} * 2^4_{(10)} + 0_{(10)} * 2^5_{(10)} + 1_{(10)} * 2^6_{(10)} + 1_{(10)} * 2^7_{(10)} + 0_{(10)} * 2^8_{(10)} + 1_{(10)} * 2^9_{(10)} = 727_{(10)}$

   Finalmente, se resuelve:
   $860_{(10)} + 727_{(10)} = 1587_{(10)}$